Übungsstunde lineare Algebra:

Heutige Themen:

- Übungsstunden Organisation
- lineare Gleichungssysteme
- Zeilenstufenform
- Gaussverfahren
- Eigenschaften des Gaussverfahrens
- Matrizen & Matrizenrechenregeln
- Die LR-Zerlegung

Organisation:

- E-Mail: michbaum@student.ethz.ch
- Slack Gruppe beitreten!
- Webseite: www.n.ethz.ch/~michbaum (Ihr habt auch alle eine Webseite!)
- Empfehlenswerte Video-Reihe: 3B1B "Essence of Linear Algebra"
- Übungsabgabe:
  - ↳ Online in der Polybox
  - ↳ Deadline Donnerstag 18:00
  - ↳ Notenbonus von 0.25 falls >75% aller Übungen "vernünftig" gelöst
  - ↳ Filename: "LinAlg Übung # Vorname Nachname" # := Seriennummer
- Donnerstagsübung wird aufgenommen und hochgeladen.

Lineare Gleichungssysteme:

Explizite Form:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right|$$

Beispiel 1.1:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}\right|$$

- **Matrixschreibweise:** Es gilt $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Beispiel 1.2: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Obere Dreiecksform / Zeilenstufenform: (ZSF)**

Ein LGS kann immer in die ZSF gebracht werden:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 \quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ 0 \quad \ddots \quad 0 \quad a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ 0 \qquad\qquad 0 + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Beispiel 1.3:

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 3 \\ 0 + 0 + 4x_3 + 0 = 2 \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 1 \end{array}$$

oder in Matrixform:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Gaussverfahren:

Das fundamentalste Verfahren in der Vorlesung.

Ziel: LGS auf die ZSF bringen, um es anschliessend mit Rückwärtseinsetzen lösen zu können.

↳ Erlaubte Operationen:

- Vertauschen von $\boxed{\text{Zeilen}}$ oder Spalten
- Vielfaches einer $\boxed{\text{Zeile}}$ oder Spalte zu einer anderen addieren

↳ Mögliche Lösungen:

- Eine eindeutige Lösung
- Unendlich viele Lösungen
- Keine Lösung

Beispiel 1.6: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Gaussen ⇒

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{array} \xrightarrow[\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array} \xrightarrow{\mathrm{III}-2\mathrm{II}} \begin{array}{ccc|c} \boxed{x_1} & \boxed{x_2} & x_3 & \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Pivot-Variable

x_3 → freie Variable

Kompatibilitätsbedingung

$$\Rightarrow x_3 = \underline{t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x_2 + 2x_3 = 1 \qquad\qquad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 + 2t = 1 \qquad\qquad x_1 = -2x_2 - x_3$$

$$x_2 = \underline{1-2t} \qquad\qquad = -2(1-2t) - t$$

$$= \underline{3t-2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 3t-2 \\ 1-2t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Homogenes LGS
o. HLGS

Beispiel 1.7: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Gauss $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II - 2I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = t \in \mathbb{R} \\ x_1 = -2t \end{array}$

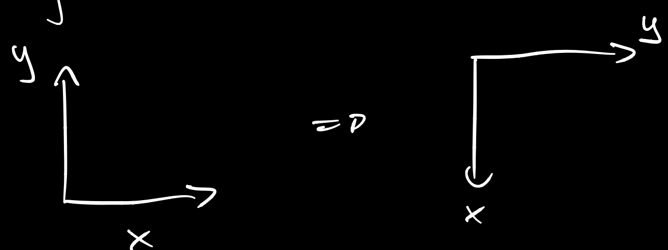
$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- Eigenschaften von LGS:
  - ↳ Ein LGS mit $\underline{b} = 0$ heisst homogen
  - ↳ Die # Zeilen oder Spalten, welche in der ZSF $\neq 0$, bestimmen den Rang der Matrix
  - ↳ Die Dimension einer Matrix bezeichnet man wie folgt:

    $\underline{\underline{A}}^{m \times n}$ bedeutet, dass A
    - m Zeilen (Gleichungen)
    - n Spalten (Unbekannte)

Tipp: Das "Koordinatensystem" einer Matrix ist ein 90° gedrehtes kartesisches Koordinatensystem:



$$\rightsquigarrow \quad m \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & a_{ij} \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix}}^{n} \right.$$

Matrizen & Matrizenrechenregeln:

- Addition: $(\underline{\underline{A}}^{m\times n} + \underline{\underline{B}}^{m\times n} = \underline{\underline{C}}^{m\times n})$

  Man addiert elementweise:

  Beispiel 1.8: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 4 & 10 & 16 \end{bmatrix}$

  $$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lightning$$

- Skalarmultiplikation: $(\alpha \cdot \underline{\underline{A}}^{m\times n} = \underline{\underline{C}}^{m\times n})$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

  Man multipliziert elementweise:

  Beispiel 1.9:

  $$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matrixmultiplikation: annulieren $(\underline{\underline{A}}^{m\times \boxed{n}} \cdot \underline{\underline{B}}^{\boxed{n}\times p} = \underline{\underline{C}}^{m\times p})$

  Bilden das "Skalarprodukt" der Zeilenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ und den Spaltenvektoren von $\underline{\underline{B}}$.

  Beispiel 1.10:

  $$\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} & p \\ n & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & p \\ m & \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

  $$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix}}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = ⚡$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{11}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$